ОБ ИОНИЗАЦИИ В НЕБУЛЯРНОЙ ОБОЛОЧКЕ, ОКРУЖАЮЩЕЙ ЗВЕЗДУ*

(Сообщено Э. А. Милном)

Едва ли в настоящее время имеются сомнения в том, что эмиссионные линии в спектрах звезд Be, так же как и эмиссионные полосы в спектрах звезд Вольф-Райе, возникают в протяженных и разреженных атмосферах, которые образуют своего рода небулярные оболочки, окружающие эти звезды. Недавно рядом наблюдателей были собраны некоторые наблюдательные данные об эмиссионных линиях и полосах и их интенсивностях. Точная теоретическая интерпретация этих данных будет возможна лишь в свете ионизационной теории для подобных протяженных оболочек. Такой теории в настоящее время не существует. Попытка очертить контуры такой теории сделана в настоящей статье.

Ясно, что ионизация зависит главным образом от плотности соответствующего „ультрафиолетового" излучения в данной точке атмосферы. Как только мы оценим эту плотность, наша проблема будет приблизительно решена. Но расчет этой плотности возможен только на базе теории лучистого равновесия в этих атмосферах. Поэтому проблема ионизации есть в сущности проблема лучистого равновесия.

Теория лучистого равновесия планетарных туманностей была предложена автором настоящей статьи в двух предыдущих статьях [1, 2]. Однако имеется важное различие в характере лучистого равновесия в планетарных туманностях и в небулярных оболочках сравнительно малого радиуса, окружающих звезды с эмиссионными линиями.

В нескольких словах это различие может быть объяснено следующим образом. В предыдущих статьях мы показали, что преобразование квантов ультрафиолетового континуума в кванты резонансной линии водородного атома (L_α), с одной стороны, и большая оптиче-

---

* On the Ionisation in the Nebular Envelope surrounding a Star. MN, **95**, 469, 1935.

ская толща планетарных туманностей в резонансной частоте, с другой, приводят к очень большой плотности L_α-излучения во внутренних частях планетарной туманности. Несмотря на то, что эта плотность более чем в 10^9 раз превышает плотность прямого L_α-излучения, падающего от звезды на внутреннюю границу туманности, она все же во много тысяч раз меньше, чем плотность L_α-излучения на поверхности центральной звезды, так как коэффициент дилюции излучения W порядка 10^{-13}. Следовательно, относительное число атомов во втором состоянии также мало по сравнению с таковым на поверхности звезды и мы еще можем пренебречь переходами со второго уровня на более высокие.

Действительно, мы знаем, что число таких переходов в каждую секунду пропорционально $n_2\rho_{23}$, где n_2 — число атомов на втором уровне в 1 $см^3$ и ρ_{23} — плотность соответствующего излучения. Для n_2 мы имеем приблизительно $n_2 \cong n_1 \frac{\rho_{12}}{\sigma_{12}}$, где ρ_{12} — плотность излучения, соответствующего переходу $1 \to 2$, и $\sigma_{12} = \frac{8\pi h\nu_{12}^3}{c^3}$. Следовательно, число переходов $2 \to 3$ пропорционально $n_1\rho_{12}\bar{\rho}_{23}$, в то время как число переходов $1 \to 3$ пропорционально $n_1\rho_{13}$. Коэффициенты пропорциональности в обоих случаях являются величинами одного порядка. Далее, на поверхности звезды мы приблизительно имеем:

$$(\bar{\rho}_{13})_{\text{поверх.}} = (\bar{\rho}_{12})_{\text{поверх.}} \cdot (\bar{\rho}_{23})_{\text{поверх.}} \,. \qquad \text{(A)}$$

В туманности мы имеем $(\bar{\rho}_{13})_{\text{тум.}} \cong W(\bar{\rho}_{13})_{\text{поверх.}}$, $(\bar{\rho}_{23})_{\text{тум.}} = W(\bar{\rho}_{23})_{\text{поверх.}}$ и $(\bar{\rho}_{12})_{\text{тум.}} = \varepsilon\,(\bar{\rho}_{12})_{\text{поверх.}}$, где ε, как было отмечено выше — малая величина порядка 10^{-4}.

Поэтому, принимая во внимание (А), мы находим:

$$(\bar{\rho}_{21})_{\text{тум.}}\,(\bar{\rho}_{23})_{\text{тум.}} \cong \varepsilon\,(\bar{\rho}_{13})_{\text{тум.}},$$

или

$$n_1\,(\bar{\rho}_{13})_{\text{тум.}}\,(\rho_{23})_{\text{тум.}} \cong n_1 \frac{\nu_{23}^3}{\nu_{13}^3}\,\varepsilon\,(\rho_{13})_{\text{тум.}},$$

и мы видим, что число переходов $2 \to 3$ составляет пренебрежимую долю числа переходов $1 \to 3$. В то же время значительная часть атомов, приходящих в третье состояние, спонтанно переходит во второе, и мы можем сказать, следовательно, что число переходов $2 \to 3$ пренебрежимо мало по сравнению с числом переходов $3 \to 2$. Иными словами, мы можем пренебречь числом циклических переходов типа

$1 \to 2 \to 3 \to 1$ по сравнению с числом циклических переходов типа $1 \to 3 \to 2 \to 1$.

В соответствии с этим метод, развитый в наших предыдущих статьях, где переходы $1 \to 2 \to 3 \to 1$ были пренебрежены, применим к планетарным туманностям.

Однако он не может применяться в случаях, когда разрежение излучения не столь велико, как в планетарных туманностях. Поэтому он ни в коем случае неприменим к газовым оболочкам звезд Вольф-Райе и Be. В звездах типа Вольф-Райе оболочки непосредственно соприкасаются с поверхностями звезд и максимум плотности имеет место на самой поверхности. В этом случае, например, W — порядка единицы, и наш метод конечно неприменим. В то же время, мы не можем в этом случае ограничиться рассмотрением монохроматического лучистого равновесия, как мы делаем это в случае обращающего слоя звезд для резонансных линий, используя то обстоятельство, что циклические переходы происходят относительно реже, чем переходы типа $1 \to 2 \to 1$. Фактически, хотя это еще справедливо в случае звезд Вольф-Райе, мы не можем пренебречь циклическими переходами, так как только эти переходы ответственны за появление эмиссионных линий (или полос).

На первый взгляд кажется сомнительным, необходимо ли принимать во внимание частичную компенсацию „прямых" циклических процессов, соответствующих явлению флюоресценции $(1 \to 3 \to 2 \to 1)$, обратными процессами $(1 \to 2 \to 3 \to 1)$, если мы признаем, что наша теория должна иметь только качественный характер, обусловленный рядом других приближений физической и геометрической природы. Нам кажется, что для вопроса об окончательных интенсивностях эмиссионных линий имеет мало значения, примем мы во внимание обратные процессы или нет. Но если нашей целью является расчет степени ионизации в оболочках, различие между этими двумя случаями будет очень большим. Точные формулы мы дадим ниже, но даже сейчас мы можем видеть, что степень ионизации, которая пропорциональна плотности соответствующего излучения, в случае полной компенсации процессов двух типов может быть представлена в согласии с теорией Шустера в виде:

$$\frac{n^+}{n} n_e = C \frac{t + 0.5}{t_1 + 1}, \tag{B}$$

где t — оптическая глубина данной точки оболочки и t_1 — полная оптическая толща, в то время как в случае, когда каждый поглощенный „ультрафиолетовый" квант дробится в кванты меньших частот и обратные процессы не имеют места, мы будем иметь:

$$\frac{n^{+}}{n} n_e = C' \cdot e^{-(\tau_1 - \tau)}. \tag{C}$$

В случае, когда оптическая толща оболочки велика по сравнению с единицей, формулы (В) и (С) дают степени ионизации совершенно различного порядка. Возможно, что точная формула даст что-то промежуточное между (В) и (С). Но различие между (В) и (С) слишком велико, чтобы дать нам возможность даже приблизительной оценки рассматриваемой величины.

В настоящей статье выполнены некоторые расчеты, которые, возможно, могут служить для этой цели.

Условия стационарного состояния. Мы рассмотрим атом, в котором электрон имеет только три энергетических уровня $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$. Этим уровням соответствуют веса g_1, g_2, g_3. Если плотность материи настолько мала, что мы можем пренебречь сверхупругими столкновениями и каждый электронный переход сопровождается излучением соответствующего светового кванта, условия стационарного состояния могут быть записаны в виде:

$$\left.\begin{aligned} n_1\{B_{12}\rho_{12} + B_{13}\rho_{13}\} &= n_2\frac{g_1}{g_2}B_{12}(\sigma_{12}+\rho_{12}) + n_3\frac{g_1}{g_3}B_{13}(\sigma_{13}+\rho_{13}) \\ n_1B_{13}\rho_{13} + n_2B_{23}\rho_{23} &= n_3\left\{\frac{g_1}{g_3}B_{13}(\sigma_{13}+\rho_{13}) + \frac{g_2}{g_3}B_{23}(\sigma_{23}+\rho_{23})\right\} \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где n_k — число атомов в k-том состоянии в кубическом сантиметре, ρ_{ik} — плотность излучения с частотой $\nu_{ik} = \frac{|\varepsilon_i - \varepsilon_k|}{h}$, B_{ik} — эйнштейновский коэффициент вероятности перехода с нижнего уровня i в более высокое состояние k.

Величины σ_{ik} связаны с ν_{ik} и универсальными постоянными посредством соотношения

$$\sigma_{k} = \frac{8\pi h\nu_{ik}^3}{c^3}. \tag{2}$$

Уравнения (1) заменяют уравнение лучистого равновесия в случае, когда условия термодинамического равновесия не имеют места.

Если мы предположим теперь, что третий энергетический уровень не является дискретным, а соответствует случаю, когда атом ионизован и электрон находится в свободном состоянии, то вместо эйнштейновских коэффициентов $B_{1\to3}$ и $B_{2\to3}$ вероятностей перехода из одного дискретного состояния в другое введем коэффициенты вероятности фотоэлектрических переходов, определяемые подходящим образом. Так, полное число ионизаций атомов в 1 *см*³ за промежуток времени dt равно:

$$(n_1 b_{1\to 3}\rho_{13} + n_2 b_{2\to 3}\rho_{23})\, dt, \tag{3}$$

где ρ_{13} — удельная плотность излучения для минимальной частоты ν_{13}, необходимой для ионизации нормального атома, и ρ_{23} — удельная плотность для минимальной частоты ν_{23}, необходимой для ионизации возбужденного атома. Строго говоря, число ионизаций, например из первого состояния, зависит не только от удельной плотности в частоте ν_{13}, но также от удельных плотностей во всех частотах, удовлетворяющих неравенству $\nu > \nu_{13}$. Однако мы можем полагать, что *относительное* распределение энергии за частотой ν_{13} определяется одним параметром T („температура"), и принять, что выражение (3) справедливо при условии, что $b_{1\to 3}$ и $b_{2\to 3}$, зависят от этого параметра.

Число спонтанных рекомбинаций, происходящих в течение того же времени dt, дается выражением

$$n_3 (a_{3\to 1} + a_{3\to 2})\, n_e dt, \tag{4}$$

где n_3 — число ионизованных атомов, а $n_3 a_{3\to 1} dt$ (или $n_3 a_{3\to 2} dt$) — вероятность такой рекомбинации свободного электрона с ионизованным атомом, которая образует атом в первом (или во втором) состоянии. Простые рассуждения, связанные с процессами ионизации, показывают, что между величинами a и b имеют место следующие соотношения:

$$a_{3\to 1} = \frac{g_1 \sigma_{13}}{g^+ G} b_{1\to 3}; \quad a_{3\to 2} = \frac{g_2 \sigma_{23}}{g^+ G} b_{2\to 3}, \tag{5}$$

где g^+ — вес нормального состояния ионизованного атома и

$$G = \frac{(2\pi m k T)^{3/2}}{h^3}. \tag{6}$$

Выражение (3) и (4) для числа переходов, а также соотношения (5) и (6) дают нам возможность написать в нашем случае условия равновесного состояния в виде:

$$\left.\begin{aligned} n_1 \{B_{12}\rho_{12} + b_{13}\rho_{13}\} &= n_2 \frac{g_1}{g_2} B_{12} (\sigma_{12} + \rho_{12}) + \frac{g}{g^+ G} b_{13} (\sigma_{13} + \rho_{13})\, n_3 n_e \\ n_1 b_{13}\rho_{13} + n_2 b_{23}\rho_{23} &= \frac{n_3 n_e}{G} \left\{ \frac{g_1}{g^+} b_{13} (\sigma_{13} + \rho_{13}) + \frac{g_2}{g^+} b_{23} (\sigma_{23} + \rho_{23}) \right\} \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Уравнения (7) могут быть приведены к виду (1), если мы в (7) обозначим:

$$g_3 = \frac{g^+ G}{n_e} \tag{8}$$

и напишем B_{13} и B_{23} вместо b_{13} и b_{23}. Единственное различие состоит в том, что коэффициенты B_{13} и B_{23}, также как и g_3, зависят в нашем случае от параметра T. Следовательно, мы можем использовать уравнения (1) как отправной пункт наших расчетов.

В ходе нашего обсуждения мы будем считать, что B_{13}, B_{23} и g_3 постоянны, так как ширина интервала относительного изменения этих величин несомненно мала по сравнению с шириной интервала изменения других величин, входящих в наше исследование. Вследствие этого обстоятельства мы получим из нашей теории сведения не о *распределении* „ультрафиолетового“ излучения в спектре, а только о приблизительном среднем значении его интенсивности.

Приближенная форма решения уравнений стационарного состояния. Каждую удельную плотность ρ_{ik} мы можем записать в виде: $\rho_{ik} = \bar{\rho}_{ik} \cdot \sigma_{ik}$. Величины $\bar{\rho}_{ik}$ безразмерны. Согласно закону Планка, на поверхности звезды мы будем иметь:

$$\bar{\rho}_{ik} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu_{ik}}{kT}} - 1}.$$

Предположим, что $\nu_{12} > 2kT$ и $\nu_{23} > 2kT$*. Тогда величины $\bar{\rho}_{ik}$ даже на поверхности звезды малы по сравнению с единицей. На поверхности мы имеем приблизительно $\bar{\rho}_{13} = \bar{\rho}_{12} \cdot \bar{\rho}_{23}$ и, следовательно, если мы будем считать $\bar{\rho}_{12}$ и $\bar{\rho}_{23}$ малыми величинами первого порядка, $\bar{\rho}_{13}$ будет величиной второго порядка. В оболочке едва ли $\bar{\rho}_{ik}$ может достигать значений, во много раз превышающих поверхностные значения. Следовательно, мы всегда можем рассматривать их как малые величины, особенно $\bar{\rho}_{13}$ как малую величину второго порядка.

Уравнения переноса излучения для частот ν_{12} и ν_{13}, которые мы рассмотрим в следующем параграфе, содержат следующие два выражения:

$$\frac{\frac{g_1}{g_2} n_2}{n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2} \quad \text{и} \quad \frac{\frac{g_1}{g_3} n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3}.$$

Эти отношения должны быть вычислены из уравнений (1). Соответствующие выражения довольно сложны. Но они достигают крайней простоты, если мы ограничиваемся членами первого и второго

* Эти условия выполняются почти во всех случаях, представляющих практический интерес.

порядка и пренебрежем более высокими членами. Выкладки слишком громоздки, чтобы быть приведенными здесь. В результате получаем:

$$\frac{\frac{g_1}{g_2} n_2}{n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2} = \bar{\rho}_{12} + \gamma (\bar{\rho}_{13} - \bar{\rho}_{12} \bar{\rho}_{23}), \tag{9}$$

$$\frac{\frac{g_1}{g_3} n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3} = \bar{\rho}_{13} + \beta (\bar{\rho}_{12} \bar{\rho}_{23} - \bar{\rho}_{13}), \tag{10}$$

где постоянные γ и β имеют следующие значения:

$$\gamma = \frac{g_2 B_{13} B_{23} \sigma_{13} \sigma_{23}}{B_{12} \sigma_{12} [g_1 B_{13} \sigma_{13} + g_2 B_{23} \sigma_{23}]}, \tag{11}$$

$$\beta = \frac{g_2 B_{23} \sigma_{23}}{g_1 B_{13} \sigma_{13} + g_2 B_{23} \sigma_{23}} = \frac{B_{12} \sigma_{12}}{B_{13} \sigma_{13}} \gamma. \tag{12}$$

Приближение, которое мы применили, имеет очень простой физический смысл. Мы можем рассматривать атомные переходы типа $1 \to 2 \to 1$ как простые процессы рассеяния квантов частоты ν_{12} нормальными атомами. Более сложные процессы типа $1 \to 2 \to 3 \to 1$ или $1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 1$ мы можем рассматривать как процессы столкновения нормального атома с двумя квантами $h\nu_{12}$ и $h\nu_{13}$. После столкновения такого рода мы можем иметь или один квант с частотой ν_{13} или снова два кванта $h\nu_{12}$ и $h\nu_{23}$. Могут иметь место также столкновения трех или более квантов с нормальным атомом. Таковы, например, процессы типа $1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 3 \to 1$, где два кванта $h\nu_{23}$ и квант $h\nu_{12}$ сталкиваются с нормальным атомом. Если, однако, плотность излучения для всех частот мала, мы можем пренебречь всеми столкновениями, в которых принимают участие более чем два кванта. Полагая далее, что плотность излучения частоты ν_{13} мала даже по сравнению с ρ_{12} и ρ_{23}, мы можем пренебречь также такими столкновениями с двумя квантами сразу, когда по крайней мере один из квантов имеет частоту ν_{13}. Таким образом мы снова получим уравнения (9) и (10).

С этой точки зрения „классическая" теория монохроматического лучистого равновесия, которая, как подчеркивалось рядом авторов, применима лишь к резонансным линиям, является первым приближением, где принимаются во внимание только малые количества первого порядка. Это приближение является достаточным для объяснения в общих чертах образования линий поглощения, но не может дать объяснения существования линий излучения. Мы знаем (согласно

Росселанду), что такое объяснение невозможно, если не приняты во внимание три частоты и циклические переходы. Теория, представленная в настоящей статье, является вторым приближением, поскольку приняты во внимание члены второго порядка. Она имеет общий характер, в то время как теория, данная в предыдущих работах автора, применима только к специальным случаям, когда благодаря сильной дилюции излучения мы можем пренебречь членом $\bar{\rho}_{12}\bar{\rho}_{23}$ по сравнению с $\bar{\rho}_{13}$. Настоящая теория, хотя она еще очень далека от точной, должна дать в каждом случае основные особенности явления эмиссионных линий.

Уравнения переноса. Для каждой частоты, подлежащей нашему рассмотрению, мы можем написать соответствующие уравнения переноса. Но это является излишним для частоты ν_{23}, так как мы можем предположить, что полная оптическая толща оболочки в этой частоте наверняка мала по сравнению с единицей. Фактически эта частота соответствует ионизации из возбужденного состояния и поэтому оптическая толща в ней будет того же порядка величины, что и оптическая толща, являющаяся результатом *общей непрозрачности* оболочки, поскольку эта непрозрачность вызвана главным образом такими связанно-свободными переходами из возбужденных состояний. Оптическая толща, обусловленная общей непрозрачностью, достигает величины порядка единицы только в фотосфере звезды. То же самое будет справедливо для частоты ν_{23} и оболочка будет прозрачна для этой частоты. Следовательно, мы можем прямо написать:

$$\bar{\rho}_{23} = \frac{W}{e^{\frac{h\nu_{23}}{kT}} - 1}, \tag{13}$$

где W — коэффициент дилюции.

Уравнения переноса излучения для частот ν_{12} и ν_{13}, как известно [3], могут быть написаны в виде:

$$\frac{dI_{12}}{\frac{h\nu_{12}}{\Delta\nu_{12}}\left(n_1 - \frac{g_1}{g_2}n_2\right)\frac{B_{12}}{c}\,ds} = -I_{12} + \frac{g_1}{g_2}\cdot\frac{c\sigma_{12}}{4\pi}\,\frac{n_2}{n_1 - \frac{g_1}{g_2}n_2}, \tag{14}$$

$$\frac{dI_{13}}{\frac{h\nu_{13}}{\Delta\nu_{13}}\left(n_1 - \frac{g_1}{g_3}n_3\right)\frac{B_{13}}{c}\,ds} = -I_{13} + \frac{g_1}{g_3}\,\frac{c\sigma_{13}}{4\pi}\,\frac{n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_3}n_3}, \tag{15}$$

где I_{12} и I_{13} — удельные интенсивности излучения с частотами ν_{12} и ν_{13}, ds — элемент траектории луча, $\Delta\nu_{12}$ — ширина резонансной линии и $\Delta\nu_{13}$ — эффективная ширина соответствующей линии поглощения.

Если мы введем коэффициент поглощения α, рассчитанный на единицу объема, для частоты ν_{12}

$$\alpha = \frac{h\nu_{12}}{\Delta\nu_{12}}\left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2\right)\frac{B_{12}}{c}, \tag{16}$$

мы получим:

$$\frac{dI_{12}}{\alpha ds} = -I_{12} + \frac{g_1}{g_2}\frac{c\sigma_{12}}{4\pi}\frac{n_2}{n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2}, \tag{17}$$

$$\frac{dI_{13}}{\alpha ds} = \frac{\nu_{13}\Delta\nu_{12}}{\nu_{12}\Delta\nu_{13}}\frac{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2}\frac{B_{13}}{B_{12}}\left\{-I_{13} + \frac{g_1}{g_3}\frac{c\sigma_{13}}{4\pi}\frac{n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3}\right\}. \tag{18}$$

Вместо интенсивностей I_{12} и I_{13} удобно ввести безразмерные величины Φ и Ψ:

$$I_{12} = \frac{c\sigma_{12}}{4\pi}\Phi; \quad I_{13} = \frac{c\sigma_{13}}{4\pi}\Psi. \tag{19}$$

Тогда уравнения (17) и (18) принимают простой вид:

$$\frac{d\Phi}{\alpha ds} = -\Phi + \frac{\frac{g_1}{g_2} n_2}{n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2}. \tag{20}$$

$$\frac{d\Psi}{\alpha ds} = \frac{\nu_{13}\Delta\nu_{12}}{\nu_{13}\Delta\nu_{13}}\frac{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2}\frac{B_{13}}{B_{12}}\left\{-\Psi + \frac{\frac{g_1}{g_3} n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3}\right\}. \tag{21}$$

Ясно, что между Φ и Ψ, с одной стороны, $\bar{\rho}_{12}$ и $\bar{\rho}_{13}$, с другой, имеют место следующие соотношения:

$$\bar{\rho}_{12} = \frac{1}{4\pi}\int \Phi d\omega; \quad \bar{\rho}_{13} = \frac{1}{4\pi}\int \Psi d\omega, \tag{22}$$

где $d\omega$ — есть элемент телесного угла и интегрирование распространяется на все направления.

Если $\bar{\rho}_{13}$ является малой величиной второго порядка, величина Ψ также будет второго порядка. Далее величина в скобках в уравнении (21) также будет второго порядка и в множителе, стоящем перед этими скобками, мы свободно можем пренебречь малыми величинами первого порядка и написать:

$$\frac{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2} = 1.$$

Если мы далее обозначим:

$$\frac{\nu_{13}\Delta\nu_{12}}{\nu_{12}\Delta\nu_{13}} \frac{B_{13}}{B_{12}} = q,$$

то, принимая во внимание (9), (10) и (22), вместо (20) и (21) можем написать:

$$\frac{d\Phi}{\alpha ds} = -\Phi + \frac{1}{4\pi}\int [\Phi + \gamma(\Psi - \bar{\rho}_{23}\Phi)]\, d\omega, \tag{23}$$

$$\frac{d\Psi}{q\alpha ds} = -\Psi + \frac{1}{4\pi}\int [\Psi + \beta(\bar{\rho}_{23}\Phi - \Psi)]\, d\omega. \tag{24}$$

Остается теперь решить эти уравнения, в которых Φ и Ψ являются функциями координат и направления излучения. Однако конкретное решение может быть получено только в случае, когда заданы граничные условия для Φ и Ψ и функция координат α.

Геометрическая модель. Уравнения (23) и (24) носят общий характер и применимы ко всем проблемам атмосфер звезд с любым (постоянным или переменным) коэффициентом дилюции. Однако мы исключаем из дальнейшего рассмотрения звезды Вольф-Райе, поскольку высокая скорость истечения материи из них ведет к неравенству частот данной линии в различных частях атмосферы. Следовательно, в этом случае задача не может быть приведена к одномерной.

Кроме того, в приведенных ниже расчетах мы ограничимся случаями, когда коэффициент дилюции мал по сравнению с единицей. Предположим, например, что $W < \frac{1}{100}$. В этом случае мы можем без опасений использовать метод приведения сферической задачи к плоской, развитый профессором Милном [4]. Единственное различие будет заключаться в том, что мы будем вычислять диффузное излучение и прямое излучение, приходящее от звезды, совместно, в то время как в работе Милна, так же как и в статьях автора, они рассматривались в отдельности. Это сделает метод несколько менее точным. Но вычисления в этом случае не так сложны.

Введем оптическую глубину на расстоянии r от центра звезды:

$$\tau = \int_r^{r_2} \alpha dr,$$

где r_2 — есть внешняя граница небулярной оболочки. Если далее r_1 есть расстояние внутренней границы от центра звезды, мы напишем:

$$\tau_1 = \int_{r_1}^{r_2} \alpha dr.$$

τ_1 — есть полная оптическая толща оболочки.

Используя приближение типа Шварцшильда-Шустера и вводя средние значения Φ и Φ' величины Φ для наружного и внутреннего направлений излучения и соответствующие средние значения Ψ и Ψ' величины Ψ, мы можем написать вместо (23) и (24) следующие приближенные уравнения:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{d\tau} = \Phi - \frac{1}{2}\left\{(\Phi + \Phi') + \gamma\left[\Psi + \Psi' - \bar{\rho}_{23}(\Phi + \Phi')\right]\right\}, \tag{25}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\Phi'}{d\tau} = \frac{1}{2}\left\{(\Phi + \Phi') + \gamma\left[\Psi + \Psi' - \bar{\rho}_{23}(\Phi + \Phi')\right]\right\} - \Phi', \tag{26}$$

$$\frac{1}{2q}\frac{d\Psi}{d\tau} = \Psi - \frac{1}{2}\left\{(\Psi + \Psi') + \beta\left[\bar{\rho}_{23}(\Phi + \Phi') - (\Psi + \Psi')\right]\right\}, \tag{27}$$

$$\frac{1}{2q}\frac{d\Psi'}{d\tau} = \frac{1}{2}\left\{(\Psi + \Psi') + \beta\left[\bar{\rho}_{23}(\Phi + \Phi') - (\Psi + \Psi')\right]\right\} - \Psi'. \tag{28}$$

На внешней границе мы имеем следующие условия:

$$\Phi'(0) = \Psi'(0) = 0 \tag{D}$$

На внутренней границе для резонансной частоты мы имеем условие равенства нулю результирующего потока,

$$\Phi(\tau_1) - \Phi'(\tau_1) = 0, \tag{E}$$

поскольку мы можем пренебречь прямым излучением звезды в этой частоте. Для „ультрафиолетового" излучения на этой границе мы имеем:

$$\Psi(\tau_1) - \Psi'(\tau_1) = \Psi_0 \qquad (F)$$

благодаря тому, что $\Psi(\tau_1)$ содержит прямое излучение звезды. Постоянная Ψ_0 связана с количеством πS ультрафиолетовой энергии, падающей на каждый квадратный сантиметр внутренней поверхности, посредством соотношения:

$$\Psi_0 = \frac{1}{2}\frac{4\pi S}{c\sigma_{13}} = 2\,W(\bar{\rho}_{13})_{\text{поверх.}}$$

Теперь остается решить уравнения (25), (26), (27) и (28), принимая во внимание граничные условия (D), (E) и (F).

Решение уравнений. Складывая (25) с (26) и (27) с (28), получаем:

$$\frac{1}{2}\frac{d(\Phi+\Phi')}{d\tau} = \Phi - \Phi', \qquad (29)$$

$$\frac{1}{2q}\frac{d(\Psi+\Psi')}{d\tau} = \Psi - \Psi'. \qquad (30)$$

Вычитая (26) из (25) и (28) из (27), имеем:

$$\frac{1}{2}\frac{d(\Phi-\Phi')}{d\tau} = -\gamma\left[\Psi + \Psi' - \bar{\rho}_{23}(\Phi+\Phi')\right], \qquad (31)$$

$$\frac{1}{2q}\frac{d(\Psi-\Psi')}{d\tau} = -\beta\left[\bar{\rho}_{23}(\Phi+\Phi') - (\Psi+\Psi')\right]. \qquad (32)$$

Дифференцируя (29) и (30) и сравнивая с (31) и (32), мы получаем следующую систему двух уравнений второго порядка для $\Phi+\Phi'$ и $\Psi+\Psi'$:

$$\frac{1}{4}\frac{d^2(\Phi+\Phi')}{d\tau^2} = -\gamma\left[\Psi+\Psi' - \bar{\rho}_{23}(\Phi+\Phi')\right], \qquad (33)$$

$$\frac{1}{4q^2}\frac{d^2(\Psi+\Psi')}{d\tau^2} = \beta\left[\Psi+\Psi' - \bar{\rho}_{23}(\Phi+\Phi')\right]. \qquad (34)$$

В модели Милна линейная толща небулярной оболочки предполагается малой по сравнению с расстоянием от центра. Поэтому в согласии с этой моделью следует полагать $W = \text{const}$ или, согласно (13), $\bar{\rho}_{23} = \text{const}$.

В этом случае общее решение системы уравнений (33) и (34) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \Phi + \Phi' &= C_1 + C_2\tau + C_3 e^{\lambda\tau} + C_4 e^{-\lambda\tau} \\ \Psi + \Psi' &= \bar{\rho}_{23}(C_1 + C_2\tau) - \frac{q^2\beta}{\gamma}(C_3 e^{\lambda\tau} + C_4 e^{-\lambda\tau}) \end{aligned}\right\}, \tag{35}$$

где

$$\lambda = 2\sqrt{\gamma\,\rho_{23} + \beta q^2}.$$

Используя (29) и (30), мы далее получаем:

$$\left.\begin{aligned} \Phi - \Phi' &= \frac{C_2}{2} + \frac{C_3\lambda}{2} e^{\lambda\tau} - \frac{C_4\lambda}{2} e^{-\lambda\tau} \\ \Psi - \Psi' &= \frac{\bar{\rho}_{23}}{2q} C_2 - \frac{q\beta}{2\gamma}\lambda C_3 e^{\lambda\tau} + \frac{q\beta}{2\gamma}\lambda C_4 e^{-\lambda\tau} \end{aligned}\right\}. \tag{36}$$

Сравнивая (36) с (E) и (F), имеем:

$$C_2 + C_3\lambda e^{\lambda\tau_1} - C_4\lambda e^{-\lambda\tau_1} = 0, \tag{37}$$

$$\frac{\bar{\rho}_{23}}{2q} C_2 - \frac{q\beta}{2\gamma}\lambda C_3 e^{\lambda\tau_1} + \frac{q\beta}{2\gamma}\lambda C_4 e^{-\lambda\tau_1} = \Psi_0. \tag{38}$$

Из (35) и (36) мы далее имеем:

$$2\Phi' = \left(C_1 - \frac{C_2}{2}\right) + C_2\tau + C_3\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)e^{\lambda\tau} + C_4\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)e^{-\lambda\tau}, \tag{39}$$

$$2\Psi' = \left(C_1 - \frac{C_2}{2q}\right)\bar{\rho}_{23} + C_2\bar{\rho}_{23}\tau - \frac{q^2\beta}{\gamma}\left[\left(1 - \frac{\lambda}{2q}\right)C_3 e^{\lambda\tau} + \left(1 + \frac{\lambda}{2q}\right)C_4 e^{-\lambda\tau}\right]. \tag{40}$$

Следовательно, граничные условия (D) могут быть записаны в виде:

$$\left(C_1 - \frac{C_2}{2}\right) + C_3\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) + C_4\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) = 0, \tag{41}$$

$$\left(C_1 - \frac{C_2}{2q}\right)\bar{\rho}_{23} - \frac{q^2\beta}{\gamma}\left[\left(1 - \frac{\lambda}{2q}\right)C_3 + \left(1 + \frac{\lambda}{2q}\right)C_4\right] = 0. \tag{42}$$

Из условий (37), (38), (41) и (42) мы можем определить коэффициенты C_1, C_2, C_3 и C_4. Имеем:

$$\left.\begin{aligned}
C_1 = {} & \frac{q\Psi_0}{\rho_{23}} \frac{1}{1+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\rho_{23}}} - \\
& - \frac{\left[\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)e^{-\lambda\tau_1} + \left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)e^{\lambda\tau_1}\right]\dfrac{(q-1)\Psi_0}{\rho_{23}\left(1+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\rho_{23}}\right)}}{\left[\left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\rho_{23}}\left(1+\dfrac{\lambda}{2q}\right)\right]e^{\lambda\tau_1}+\left[\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\rho_{23}}\left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)\right]e^{-\lambda\tau_1}} - \\
& - \frac{\left\{\left[\left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\rho_{23}}\left(1+\dfrac{\lambda}{2q}\right)\right]\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)-\left[\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\rho_{23}}\left(1-\dfrac{\lambda}{2q}\right)\right]\left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)\right\}}{\left[\left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\rho_{23}}\left(1+\dfrac{\lambda}{2q}\right)\right]e^{\lambda\tau_1}+\left[\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\rho_{23}}\left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)\right]e^{-\lambda\tau_1}} \times \\
& \times \frac{2q\Psi_0}{\gamma\rho_{23}} \frac{1}{1+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\rho_{23}}} \\
C_2 = {} & \frac{2q\Psi_0}{\rho_{23}} \frac{1}{1+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\rho_{23}}} \\
C_3 = {} & -\frac{\dfrac{(1-q)\Psi_0}{\rho_{23}\left(1+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\rho_{23}}\right)}e^{-\lambda\tau_1}+\left[\left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\rho_{23}}\left(1+\dfrac{\lambda}{2q}\right)\right]\dfrac{2q\Psi_0}{\gamma\rho_{23}}\dfrac{1}{1+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\rho_{23}}}}{\left[\left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\rho_{23}}\left(1+\dfrac{\lambda}{2q}\right)\right]e^{\lambda\tau_1}+\left[\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\rho_{23}}\left(1-\dfrac{\lambda}{2q}\right)\right]e^{-\lambda\tau_1}} \\
C_4 = {} & -\frac{\dfrac{(1-q)\Psi_0}{\rho_{23}\left(1+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\rho_{23}}\right)}e^{\lambda\tau_1}+\left[\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\rho_{23}}\left(1-\dfrac{\lambda}{2q}\right)\right]\dfrac{2q\Psi_0}{\gamma\rho_{23}}\dfrac{1}{1+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\rho_{23}}}}{\left[\left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\rho_{33}}\left(1+\dfrac{\lambda}{2q}\right)\right]e^{\lambda\tau_1}+\left[\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\rho_{23}}\left(1-\dfrac{\lambda}{2q}\right)\right]e^{-\lambda\tau_1}}.
\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Ионизация в оболочке. Нашей целью является нахождение степени ионизации в оболочке. Если оболочка прозрачна для излучения в частоте ν_{13}, ионизация определяется согласно простым формулам, выведенным Эддингтоном и Росселандом. Однако наибольший интерес представляет случай, когда оболочка непрозрачна для этого излучения, т. е. оптическая толща в частоте ν_{13}, которая равна $q\tau_1$, велика по сравнению с единицей. Таким образом $\tau_1 \gg \frac{1}{q}$. Обычно $\frac{1}{q}$ порядка 10^4. Следовательно, если дилюция излучения не так велика, как в планетарных туманностях, величина $e^{-\lambda\tau_1}$ очень мала, а $e^{\lambda\tau_1}$ очень велика.

Это обстоятельство дает возможность упрощения выражений для C_3 и C_4 путем пренебрежения малыми величинами. Таким образом, из приведенных выше формул мы получаем следующие приближенные значения:

$$C_3 = \frac{2q\Psi_0}{\lambda\bar{\rho}_{23}} \frac{1}{1+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\bar{\rho}_{23}}} e^{-\lambda\tau_1}; \quad C_4 = -\frac{\dfrac{(1-q)\Psi_0}{\bar{\rho}_{23}\left(1+\dfrac{q^2\beta}{\lambda\bar{\rho}_{23}}\right)}}{\left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)+\dfrac{q^2\beta}{\gamma\bar{\rho}_{23}}\left(1+\dfrac{\lambda}{2q}\right)}. \tag{44}$$

Теперь ясно, что выражение

$$C_3 e^{\lambda\tau} + C_4 e^{-\lambda\tau}$$

всегда очень мало, исключая области около $\tau = 0$ и $\tau = \tau_1$. Во всех других частях оболочки, практически во всей оболочке, пренебрегая этими членами, мы можем вместо (35) написать:

$$\begin{aligned} \Phi + \Phi' &= C_1 + C_2\tau \\ \Psi + \Psi' &= \bar{\rho}_{23}(C_1 + C_2\tau). \end{aligned} \tag{45}$$

Рассмотрим случай, когда дилюция излучения не столь велика и следовательно $\bar{\rho}_{23} \gg q^2$.* В этом случае мы просто имеем:

$$C_2 = \frac{2q\Psi_0}{\bar{\rho}_{23}}, \tag{46}$$

поскольку β и γ имеют приблизительно одинаковый порядок величины.

Принимая во внимание, что λ мало по сравнению с единицей, мы имеем также:

$$C_1 \cong \frac{\Psi_0}{\bar{\rho}_{23}}. \tag{47}$$

---

* Мы имеем $\bar{\rho}_{23} = W(\bar{\rho}_{23})_{\text{поверх.}}$ Далее, $q \cong 10^{-4}$. Если $(\bar{\rho}_{23})_{\text{поверх.}}$ порядка 10^{-2}, неравенство в тексте будет удовлетворено при $W \gg 10^{-6}$. Это безусловно не удовлетворяется в случае планетарных туманностей.

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \Phi + \Phi' &\cong \frac{2\Psi_0}{\bar{\rho}_{23}}\left(q\tau + \frac{1}{2}\right) \\ \Psi + \Psi' &\cong 2\Psi_0\left(q\tau + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{48}$$

Мы можем теперь получить приближенные значения $\bar{\rho}_{12}$ и $\bar{\rho}_{13}$. Имеем:

$$\bar{\rho}_{12} = \frac{1}{2}(\Phi + \Phi'); \quad \bar{\rho}_{13} = \frac{1}{2}(\Psi + \Psi')$$

и $\tau = \dfrac{t}{q}$, где t — оптическая толща в частоте ν_{13}. Таким образом:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\rho}_{12} &\cong \frac{\Psi_0}{\bar{\rho}_{23}}\left(t + \frac{1}{2}\right) \\ \bar{\rho}_{13} &\cong \Psi_0\left(t + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{49}$$

Если теперь вспомним, что

$$\Psi_0 = 2W(\bar{\rho}_{13})_{\text{поверх.}}; \quad \bar{\rho}_{23} = W(\bar{\rho}_{23})_{\text{поверх.}}; \quad (\bar{\rho}_{13})_{\text{поверх.}} = (\bar{\rho}_{12})_{\text{поверх.}}(\bar{\rho}_{23})_{\text{поверх.}},$$

мы можем вместо (49) написать:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\rho}_{12} &\cong 2(\bar{\rho}_{12})_{\text{поверх.}}\left(t + \frac{1}{2}\right) \\ \bar{\rho}_{13} &\cong 2W(\bar{\rho}_{13})_{\text{поверх.}}\left(t + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{50}$$

Мы видим теперь, что если наши предположения выполняются, плотность излучения в резонансной частоте в оболочке больше, чем на поверхности звезды. Однако в дальнейшем необходимо проверить, в какой мере это важное заключение остается правильным, если принимаются во внимание неупругие столкновения, происходящие в оболочке.

Подставляя (50) в (10), мы находим степень ионизации:

$$\frac{\dfrac{g_1}{g_3}n_3}{n_1 - \dfrac{g_1}{g_3}n_3} \cong \bar{\rho}_{13} \cong W(\bar{\rho}_{13})_{\text{поверх.}}(2t+1);$$

или приближенно

$$\frac{g_1}{g_3}\frac{n_3}{n_1} \cong W(\bar{\rho}_{13})_{\text{поверх.}}(2t+1). \tag{51}$$

Согласно (8) и (6):

$$g_3 = \frac{g^+}{n_e} \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}.$$

Далее, приближенно

$$(\bar{\rho}_{13})_{\text{поверх.}} = e^{-\frac{h\nu_{13}}{kT}}.$$

Вводя эти выражения в (51), мы получаем окончательно:

$$\frac{n_3}{n_1} n_e = \frac{g^+}{g_1} (2t+1)\, W \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} e^{\frac{h\nu_{13}}{kT}}. \tag{52}$$

Мы заключаем, что ионизация очень медленно убывает в наружном направлении.

Астрономическая обсерватория
университета, Ленинград
Декабрь 1934 года

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Амбарцумян, MN, **93**, 50, 1932.
2. В. А. Амбарцумян, Бюллетень Пулк. Обс., **13**, 3, 1933.
3. E. A. Milne, MN, **88**, 493, 1928.
4. E. A. Milne, Z. f. Ap. **1**, 98, 1930.

Примечание. При выводе формулы (52) принята во внимание ионизация из возбужденного состояния, существенно зависящая от населенности этого состояния, а значит и от плотности излучения в линии, определяющей эту населенность. Однако при этом не учтен ряд факторов, сильно влияющих на плотность излучения в линии (см. примечание к статье „Лучистое равновесие планетарной туманности“). При учете этих факторов формула ионизации сильно меняется.